Calcul d'une décomposition simpliciale isotopique à une variété algébrique lisse de $P_n(\mathbb{R})$

et calcul de sa topologie (e.g. nombres de Betti)

Christophe Raffalli

Lycée Paul Gauguin

UPF, 7 mars 2023

Introduction

Le problème

On cherche à calculer une variété affine par morceau homéomorphe (ou isotopique) à la variété de $P^n(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} p_1(x_0, x_1, \dots, x_n) & = & 0 \\ \dots & = & \dots \\ \dots & = & \dots \\ p_k(x_0, x_1, \dots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

avec $p_1, \dots, p_k$ des polynômes homogènes à $n+1$ variables .

Introduction

Le problème

On cherche à calculer une variété affine par morceau homéomorphe (ou isotopique) à la variété de $P^n(\mathbb{R})$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ \ldots & = & \ldots \\ p_k(x_0, x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right.$$

avec $p_1, \ldots, p_k$ des polynômes homogènes à $n+1$ variables .

Plus précisément, si on décompose le plan projectif en simplexes, on peut définir des fonctions $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k$ affines par morceaux qui coïncident avec p aux sommets des simplexes.

Introduction

Le problème

On cherche à calculer une variété affine par morceau homéomorphe (ou isotopique) à la variété de $P^n(\mathbb{R})$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_1(x_0, x_1, \dots, x_n) & = & 0 \\ \dots & = & \dots \\ \dots & = & \dots \\ p_k(x_0, x_1, \dots, x_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

avec $p_1, \dots, p_k$ des polynômes homogènes à $n+1$ variables .

On propose une condition assurant que ces fonctions affines par morceaux définissent une variété isotopique à la variété de départ.

Exemple

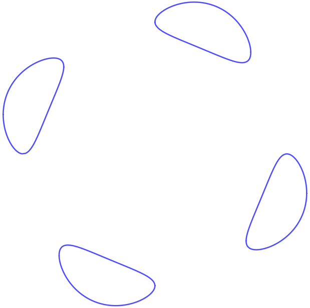
- $s(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ l'équation de la sphère homogénéisée.
- $q_0(x, y, z, t)$ un polynôme homogène bien choisi de degré 4
- $q_1(x, y, z, t) = q_0(x, y, z, t) + s^2(x, y, z, t)$
- $q_1(x, y, z, t) = 0$ donne ceci ...
- Que l'on approxime ainsi ...
- On approxime aussi $\{q0(x, y, z, t) = 0, s(x, y, z, t) = 0\}$,
- et $\{q1(x, y, z, t) = 0, s(x, y, z, t) = 0\}$ qui est la même variété.

Attention

On produit des théorèmes! (au moins en codimension 1)

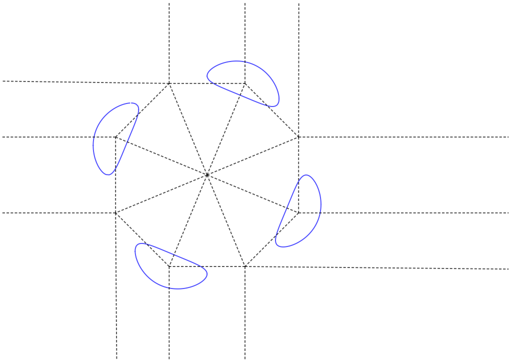
Approximation affine par morceaux

- Soit p un polynôme tel que $\{x \in \mathbb{R}^n, p(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^\circ$ un polyèdre compact.



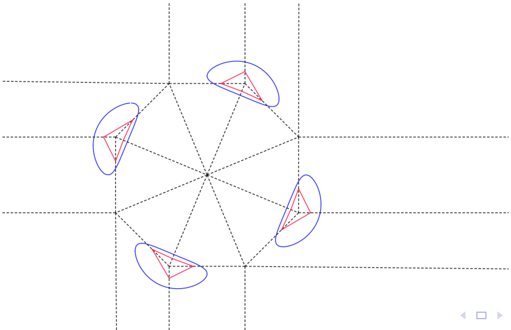
Approximation affine par morceaux

- Soit p un polynôme tel que $\{x \in \mathbb{R}^n, p(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^\circ$ un polyèdre compact.
- On choisit une décomposition de $\mathbb{K}$ en simplexes $\{S_i\}_{i \in I}$



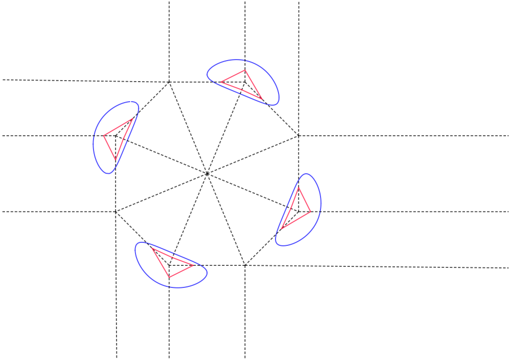
Approximation affine par morceaux

- Soit p un polynôme tel que $\{x \in \mathbb{R}^n, p(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^\circ$ un polyèdre compact.
- On choisit une décomposition de $\mathbb{K}$ en simplexes $\{S_i\}_{i \in I}$
- On approxime p par une fonction affine par morceaux $\tilde{p}$
  - $\tilde{p}(x) = p(x)$ si x est un sommet de la décomposition.
  - $\tilde{p}$ restreinte à chaque simplexe S_i est affine.



Approximation affine par morceaux

- Soit p un polynôme tel que $\{x \in \mathbb{R}^n, p(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^\circ$ un polyèdre compact.
- On choisit une décomposition de $\mathbb{K}$ en simplexes $\{S_i\}_{i \in I}$
- On approxime p par une fonction affine par morceaux $\tilde{p}$
- On cherche une condition pour $\{x \in \mathbb{K}, \tilde{p} = 0\} \simeq \{x \in \mathbb{K}, p = 0\}$



Avec un seul polynôme, sur un polyèdre compact de $\mathbb{R}^n$

Notre condition

- $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre compact
- p un polynôme de $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$ tel que $\{x \in \mathbb{K}, p(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^\circ$
- $(S_i)_{i \in I}$ une décomposition simpliciale de $\mathbb{K}$
- $\tilde{p}$ la fonction affine par morceaux associée

$$\forall x \in \mathbb{K}, p(x)\tilde{p}(x) \leq 0 \text{ implique } 0_n \notin H(\{\nabla p(x)\} \cup \nabla\tilde{p}(x))$$

où

- $\nabla\tilde{p}(x) = \{\nabla\tilde{p}|_{S_i}(x), i \in I, x \in S_i\}$
- $H(V)$: l'enveloppe convexe des vecteurs dans V

Avec un seul polynôme (sketch de preuve)

On définit $\mathbb{K}' = \{x \in \mathbb{K}, p(x)\tilde{p}(x) \leq 0\}$ et $G(x) = \{\nabla p(x)\} \cup \nabla \tilde{p}(x)$ on a

$$\forall x \in \mathbb{K}', 0_n \notin H(G(x))$$

La condition, la compacité et Hahn-Banach impliquent

$$\begin{array}{l} \exists \epsilon > 0, \exists N : \mathbb{K}' \to \mathbb{R}^n \text{ tels que} \\ \forall x, y \in \mathbb{K}', \forall v \in G(x), \|x - y\| < \epsilon \Rightarrow N(y).v > 0 \end{array}$$

On définit $N_\eta : \mathbb{K}' \to \mathbb{R}^n$ vérifiant la même propriété que $N(x)$, mais de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les courbes intégrales de N_η dans $\mathbb{K}'$ donnent l'isotopie recherchée car p et $\tilde{p}$ sont croissantes le long de ces courbes. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{K}', \text{ on a } N_\eta(x).\nabla p(x) > 0 \text{ et } N_\eta(x).\nabla \tilde{p}(x) > 0$$

Sur le projectif

- Le polynôme p est homogène sur $\mathbb{R}^{n+1}$,
- Le polynôme $\tilde{p}$ associé à la décomposition simpliciale est affine par morceau et homogène, donc linéaire par morceau.
- On prend $\mathbb{K} = S^n$
- On construit N et N_η sur S^n de la même manière, et on montre qu'ils ne sont jamais normaux à la sphère sur $\mathbb{K}'$.
- On considère les courbes intégrale de la projection de $N_\eta(x)$ sur le plan tangent à S^n.
- On doit tenir compte de l'homogénéité pour finir la preuve.
- Ce n'est pas un corollaire du résultat précédent (dommage).

Comment tester le critère et produire un certificat

La base de Bernstein, pour les polynômes homogènes à $n+1$ variables de degré d:

$$\left(\frac{d!}{\alpha!}x^\alpha \text{ avec } x^\alpha = \Pi_i x_i^{\alpha_i} \text{ et } \alpha! = \Pi_i \alpha_i!\right)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, \Sigma_i \alpha_i = d}$$

Propriété (Casteljau)

La valeur de $p(x)$ sur le simplexe unité du quadrant positif est dans l'enveloppe convexe des coefficients de p dans la base de Bernstein.

Comment tester le critère et produire un certificat

On a défini $\mathbb{K}' = \{x \in \mathbb{K}, p(x)\tilde{p}(x) \leq 0\}$ et $G(x) = \{\nabla p(x)\} \cup \nabla\tilde{p}(x)$ on a
Comment tester:

$$\forall x \in \mathbb{K}', 0_n \notin H(G(x))$$

- On écrit p, $\tilde{p}$ et leurs gradients dans la base de Berstein lié à un simplexe.
- Pour que la condition soit vraie sur un simplexe, il suffit de vérifier que 0 ou 0_n ne sont pas dans une enveloppe convexe d'un nombre fini de valeurs ou de vecteurs. Optimisation donnant un vecteur N valable dans tout le simplexe.
- On utilise des simplexes qui sont des sous-ensembles des faces de toutes dimensions des simplexes S_i de la décomposition.
  On peut donc approcher la condition d'aussi près que l'on veut.
- Les vecteurs $N(x)$ fournissent des «certificats» sur chaque simplexe.

L'algorithme

1. On part d'une décomposition initiale en simplexes
2. On teste la condition
3. Si elle est fausse on raffine la décomposition et on va en (2)
4. Si elle est vraie on reteste la condition avec les certificats et une arithmétique exacte.
5. Si on veut, on calcule des invariants topologiques (caractéristique d'Euler, nombre de Betti, ...)
6. L'implémentation actuelle est en OCaml, dimension et codimension quelconque, avec un test (nouveau?) pour $0 \in H(V)$, sur github.

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Comment le généraliser en codimension > 1?
Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

1. $\forall A \in H(M), A$ de rang maximum

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

1. $\forall A \in H(M), A$ de rang maximum
2. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA$ inversible
3. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA + {}^tAB$ s.d.p.

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

1. $\forall A \in H(M), A$ de rang maximum
2. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA$ inversible
3. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA + {}^tAB$ s.d.p.
4. $\forall \sigma \in \{-1, 1\}^m, 0 \notin H(\{{}^t\sigma A, A \in M\})$
5. $\forall \sigma \in \{-1, 1\}^m, \exists V_\sigma \in \mathbb{R}^n, \forall A \in M, {}^t\sigma A V_\sigma > 0$

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

1. $\forall A \in H(M), A$ de rang maximum
2. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA$ inversible
3. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA + {}^tAB$ s.d.p.
4. $\forall \sigma \in \{-1,1\}^m, 0 \notin H(\{{}^t\sigma A, A \in M\})$
5. $\forall \sigma \in \{-1,1\}^m, \exists V_\sigma \in \mathbb{R}^n, \forall A \in M, {}^t\sigma A V_\sigma > 0$

$(2) \leftrightarrow (3) \rightarrow (1)$ et $(4) \leftrightarrow (5) \rightarrow (1)$ mais $(1) \rightarrow (2)???$

Le coeur du critère (Hahn-Banach)

Si $V \subset \mathbb{R}^n$, on utilise essentiellement:

1. $0 \notin H(V)$
2. $\exists N, \forall v \in V, N.v > 0$

Si $M \subset \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $m \leq n$:

1. $\forall A \in H(M), A$ de rang maximum
2. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA$ inversible
3. $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}(R), \forall A \in M, {}^tBA + {}^tAB$ s.d.p.
4. $\forall \sigma \in \{-1,1\}^m, 0 \notin H(\{{}^t\sigma A, A \in M\})$
5. $\forall \sigma \in \{-1,1\}^m, \exists V_\sigma \in \mathbb{R}^n, \forall A \in M, {}^t\sigma A V_\sigma > 0$

$$(2) \leftrightarrow (3) \rightarrow (1) \text{ et } (4) \leftrightarrow (5) \rightarrow (1) \text{ mais } (1) \rightarrow (2)???$$

Implementation actuelle utilisant (4,5) car cela donne un certificat.
Ça semble marcher, mais pas de preuve!

Travaux futurs

- Preuve en codimension > 1
- En particulier: Hahn-Banach sur les matrices ?
- Quelles sont les meilleures décompositions en simplexes ?
- Cas singulier (les singularités isolées semblent possibles).
- Combiner avec des techniques d'éliminations de variables.
- Implémenter l'isotopie pour montrer la «vraie» surface.